Amortissement libre du système balancier-spiral

Analyse de la courbe d'amortissement

Balancier annulaire monométallique d'une montre bracelet

Référence :D:\Résonateur (TE)\Data\Montre HES.mcd(R)

$T_0 = 0.25\,s$ $\quad f = 4\,s^{-1}$ $\quad \omega_0 := 2\cdot\pi\cdot f$ $\quad J_b = 10\,mg\cdot cm^2$ $\quad M_b = 59.5\,mg$

Amplitude stationnaire (choix) $\quad \theta_0 = 270\,deg$

Mesure de la courbe d'amortissement (si le fichier ne s'ouvre pas, cliquer 2X et chercher le chemin)

$\mathbf{A} :=$ ..\...\Amplitudes_V3H_003_m1.xls $\quad n := dernier(\mathbf{A})$ $\quad n = 59$ $\quad j := 0..n$ $\quad \mathbf{A}_j := \mathbf{A}_j\cdot deg$

$\mathbf{A}_0 = 357.38\,deg$ $\quad i := 1..n$ $\quad \Delta\mathbf{A}_i := \mathbf{A}_{i-1} - \mathbf{A}_i$

Détermination des paramètres de frottement

Régression quadratique

$$A1 := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i \qquad A2 := \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{A}_i)^2 \qquad A3 := \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{A}_i)^3 \qquad A4 := \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{A}_i)^4$$

$$B0 := \sum_{i=1}^{n} \Delta\mathbf{A}_i \qquad B1 := \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{A}_i\cdot\Delta\mathbf{A}_i) \qquad B2 := \sum_{i=1}^{n} \left[(\mathbf{A}_i)^2\cdot\Delta\mathbf{A}_i\right] \qquad C2 := \sum_{i=1}^{n} (\Delta\mathbf{A}_i)^2$$

$$K := n\cdot\frac{A2}{A1} - A1 \qquad L := A2 - n\cdot\frac{A3}{A1} \qquad M := A3 - A2\cdot\frac{A2}{A1} \qquad D := (K\cdot A4 + L\cdot A3 + M\cdot A2)\cdot A1$$

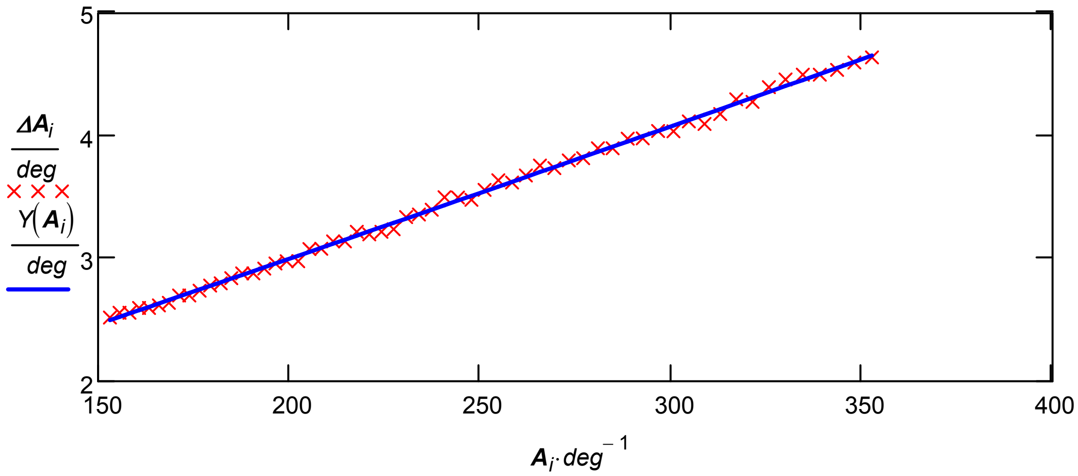
$$a := (K\cdot B2 + L\cdot B1 + M\cdot B0)\cdot\frac{A1}{D} \qquad N1 := \frac{B1 - a\cdot A3}{A1} \qquad R := B0 - a\cdot A2 \qquad b := \frac{n\cdot N1 - R}{K} \qquad c := \frac{R - b\cdot A1}{n}$$

$$Q := c\cdot b\cdot A1 + a\cdot b\cdot A3 + c\cdot a\cdot A2 \qquad Q := 2\cdot Q + n\cdot c^2 + A2\cdot b^2 + A4\cdot a^2$$

$$\sigma_y := \sqrt{\frac{C2 - Q}{n-3}} \qquad \sigma_a := \sqrt{\frac{K\cdot A1}{D}}\cdot\sigma_y \qquad \sigma_b := \sqrt{\frac{n\cdot A4 - A2\cdot A2}{D}}\cdot\sigma_y \qquad \sigma_c := \sqrt{\frac{A2\cdot A4 - A3\cdot A3}{D}}\cdot\sigma_y$$

$a = 6.06\times 10^{-5}$ $\quad b = 0.01$ $\quad c = 0.016$

$\sigma_y = 0.029\,deg$ $\quad \sigma_a = 6.971\times 10^{-5}$ $\quad \sigma_b = 6.098\times 10^{-4}$ $\quad \sigma_c = 1.276\times 10^{-3}$ $\quad Y(x) := a\cdot x^2 + b\cdot x + c$



Paramètres de frottement

Frottement sec $f_b := \frac{c}{4}$ $\sigma_f := \frac{\sigma_c}{4}$ $\boxed{f_b = 3.932 \times 10^{-3}}$ $\sigma_f = 3.191 \times 10^{-4}$

Demi-angle d'équilibre $\Delta\theta_e := f_b$ $\Delta\theta_e = 0.225\,deg$

Couple de frottement constant $\Gamma_c := f_b \cdot J_b \cdot \omega_0^2$ $\Gamma_c = 2.484 \times 10^{-9}\,N \cdot m$

Frottement visqueux $\eta_b := \frac{b}{2 \cdot \pi}$ $\sigma_\eta := \frac{\sigma_b}{2 \cdot \pi}$ $\boxed{\eta_b = 1.635 \times 10^{-3}}$ $\sigma_\eta = 9.705 \times 10^{-5}$

Décrément logarithmique $\delta := 2 \cdot \pi \cdot \eta_b$ $\delta = 0.0103$

Facteur de qualité "visqueux" $Q_{visqueux} := \frac{\pi}{\delta}$ $Q_{visqueux} = 305.817$

Constante de frottement visqueux $\Gamma_v := 2 \cdot \eta_b \cdot J_b \cdot \omega_0$ $\Gamma_v = 8.218\,10^{-11} \cdot N \cdot m \cdot s$

Frottement quadratique $\kappa_b := \frac{3}{8} \cdot a$ $\sigma_\kappa := \frac{3}{8} \cdot \sigma_a$ $\boxed{\kappa_b = 2.273 \times 10^{-5}}$ $\sigma_\kappa = 2.614 \times 10^{-5}$

Constante de frottement quadratique $\Gamma_q := \kappa_b \cdot J_b$ $\Gamma_q = 2.273\,10^{-14} \cdot N \cdot m \cdot s^2$

Equation différentielle et graphe du mouvement

Système différentiel non linéaire

$$\theta' = v$$
$$v' + (\omega_0)^2\,\theta + 2\eta\omega_0 v - \varepsilon\kappa v^2 - \varepsilon\omega_0^2 f = 0$$

Solution numérique

$f = 4\,Hz$ $T_0 = 0.25\,s$ $\omega_0 := 2 \cdot \pi \cdot f$ $\omega_0 = 25.133\,s^{-1}$ $\omega_0 := \omega_0 \cdot s$

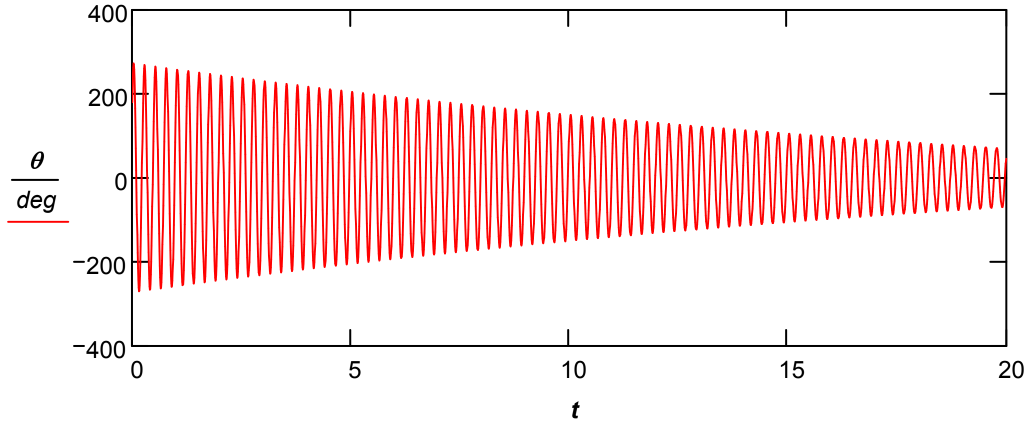
Position initiale $q_0 := 180 \cdot deg$ Vitesse initiale $v_0 := 90 \cdot rad \cdot s^{-1}$

Durée d'observation (nombre de périodes): $nb\_p := 80$ $T_t := nb\_p \cdot T_0$ $np := 32 \cdot nb\_p - 1$ $t := 0, \frac{T_t}{np} .. T_t$

$$\mathbf{q} := \begin{pmatrix} q_0 \\ v_0 \cdot s \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D}(t, q) := \begin{bmatrix} q_1 \\ -\omega_0^2 \cdot q_0 - \omega_0^2 \cdot f_b \cdot \frac{q_1}{|q_1|} - 2 \cdot (\omega_0 \cdot \eta_b) \cdot q_1 - \kappa_b \cdot \frac{(q_1)^3}{|q_1|} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z} := rkfixe(\mathbf{q}, 0, T_t \cdot s^{-1}, np, \mathbf{D}) \qquad \mathbf{t} := \mathbf{Z}^{\langle 0 \rangle} \qquad \boldsymbol{\theta} := \mathbf{Z}^{\langle 1 \rangle} \qquad \mathbf{v} := \mathbf{Z}^{\langle 2 \rangle}$$

Graphe du mouvement



Perturbation d'amplitude

Perte d'amplitude par oscillation: $\Delta\theta(\theta) := 4\cdot f_b + 2\cdot\pi\cdot\eta_b\cdot\theta + \frac{8}{3}\cdot\kappa_b\cdot\theta^2$

Perte d'amplitude pour θ_0 $\theta_0 = 270\,deg$ $\Delta\theta_0 := \Delta\theta(\theta_0)$ $\Delta\theta_0 = 3.752\,deg$

Part due au frottement constant $\Delta\theta_c(\theta) := 4\cdot f_b$ $\Delta\theta_c(\theta_0)\cdot\Delta\theta_0^{-1} = 24.02\,\%$

Part due au frottement visqueux $\Delta\theta_v(\theta) := 2\cdot\pi\cdot\eta_b\cdot\theta$ $\Delta\theta_v(\theta_0)\cdot\Delta\theta_0^{-1} = 73.925\,\%$

Part due au frottement quadratique $\Delta\theta_q(\theta) := \frac{8}{3}\cdot\kappa_b\cdot\theta^2$ $\Delta\theta_q(\theta_0)\cdot\Delta\theta_0^{-1} = 2.055\,\%$

Nombre d'oscillations jusqu'à l'arrêt complet

$q_0 := \theta_0$ $q_0 = 4.712$

```
q_osc := | i ← 0
         | q ← θ0
         | while  q > f_b
         |   | i ← i + 1
         |   | q ← q − (4·f_b + 2·π·η_b·q + (8/3)·κ_b·q²)
         |   | q_osc_i ← q
         | q_osc
```

$Nb_{osc} := dernier(\mathbf{q_{osc}}) - 1$

$Nb_{osc} = 134$

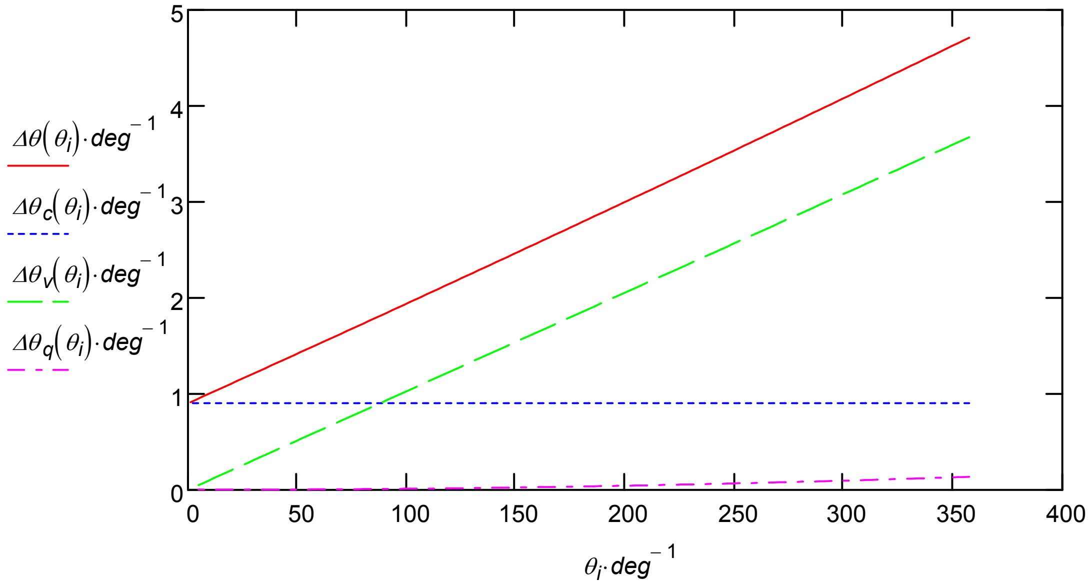
$\theta_{fin} := \mathbf{q_{osc}}_{Nb_{osc}}$

$\theta_{fin} = 1.112\,deg$

$temps := Nb_{osc}\cdot T_0$ $temps = 33.5\,s$

Perte d'amplitude par oscillation en fonction de l'amplitude du balancier

$i := 0 .. Nb_{osc} + 1$ $\theta_{init} := \mathbf{A}_0$ $\theta_i := \theta_{init} - i\cdot\frac{\theta_{init} - \theta_{fin}}{Nb_{osc} + 1}$



Perturbation de marche due aux seuls frottements

Défaut d'isochronisme $\mu(\theta) := \frac{-86400}{2\cdot\pi}\cdot\left(\pi\cdot\eta_b{}^2 + \frac{32}{9}\cdot\eta_b\cdot\kappa_b\cdot\theta + \frac{\pi}{3}\cdot\kappa_b{}^2\cdot\theta^2\right)$

Marche pour θ_0 $\theta_0 = 270\,deg$ $\mu(\theta_0) = -0.124$ s/d

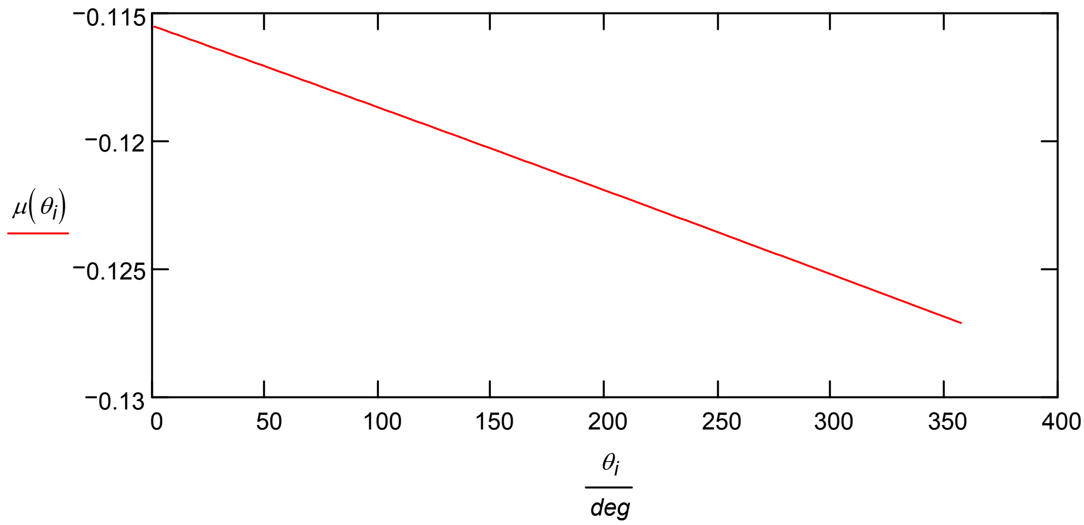
Part due au frottement constant $\Delta\mu_c(\theta) := 0$

Part due au frottement visqueux $\Delta\mu_v(\theta) := \frac{-86400}{2\cdot\pi}\cdot\left(\pi\cdot\eta_b{}^2\right)$ $\Delta\mu_v(\theta_0)\cdot\mu(\theta_0)^{-1} = 92.974\,\%$

Part due au frottement quadratique $\Delta\mu_q(\theta) := \frac{-86400}{2\cdot\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{3}\cdot\kappa_b{}^2\cdot\theta^2\right)$ $\Delta\mu_q(\theta_0)\cdot\mu(\theta_0)^{-1} = 0.133\,\%$

Part due au couplage visqueux-quadratique $\Delta\mu_{vq}(\theta) := \frac{-86400}{2\cdot\pi}\cdot\left(\frac{32}{9}\cdot\eta_b\cdot\kappa_b\cdot\theta\right)$ $\Delta\mu_{vq}(\theta_0)\cdot\mu(\theta_0)^{-1} = 6.893\,\%$

Défaut d'isochronisme



Bilan énergétique

Energie dissipée

Théorique $\Delta E(\theta) := J_b\cdot\omega_0{}^2\cdot\theta\cdot\Delta\theta(\theta)$ Mesurée $j := 1..n$ $\Delta E_{m_j} := \frac{1}{2}\cdot J_b\cdot\omega_0{}^2\cdot\left[\left(\boldsymbol{A}_{j-1}\right)^2 - \left(\boldsymbol{A}_j\right)^2\right]$

Energie dissipée pour θ_0 $\theta_0 = 270\,deg$ $\Delta E(\theta_0) = 1.949\times10^{-7}\,joule$

Part due au frottement constant $\Delta E_c(\theta) := J_b\cdot\omega_0{}^2\cdot\theta\cdot\Delta\theta_c(\theta)$ $\Delta E_c(\theta_0)\cdot\Delta E(\theta_0)^{-1} = 24.02\,\%$

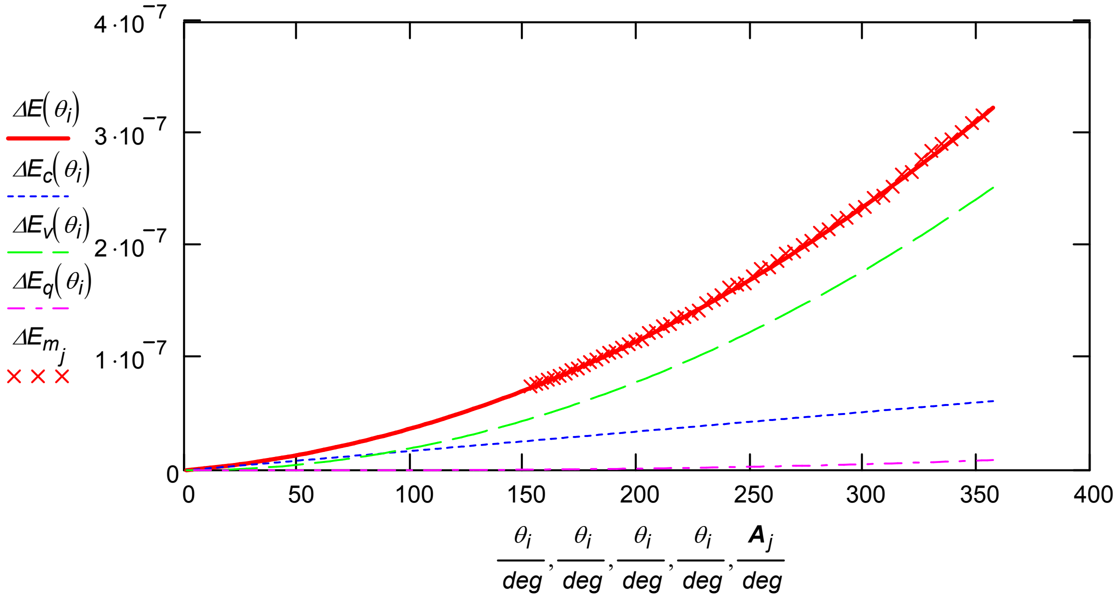
Part due au frottement visqueux $\Delta E_v(\theta) := J_b\cdot\omega_0{}^2\cdot\theta\cdot\Delta\theta_v(\theta)$ $\Delta E_v(\theta_0)\cdot\Delta E(\theta_0)^{-1} = 73.925\,\%$

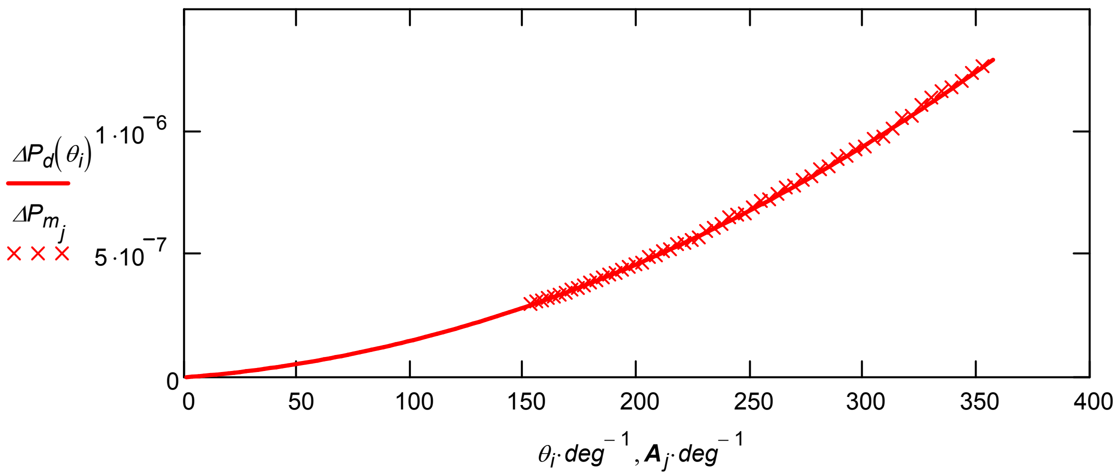
Part due au frottement quadratique $\Delta E_q(\theta) := J_b\cdot\omega_0{}^2\cdot\theta\cdot\Delta\theta_q(\theta)$ $\Delta E_q(\theta_0)\cdot\Delta E(\theta_0)^{-1} = 2.055\,\%$

Puissance dissipée

Théorique $\Delta P_d(\theta) := \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot J_b\cdot\omega_0{}^3\cdot\theta\cdot\Delta\theta(\theta)$ Mesurée $\Delta P_{m_j} := \frac{\Delta E_{m_j}}{T_0}$

Puissance dissipée pour θ_0 $\theta_0 = 270\,deg$ $\Delta P_d(\theta_0) = 7.797\times10^{-7}\,W$





Evolution du facteur de qualité

Théorique $Q(\theta) := \pi\cdot\frac{\theta}{\Delta\theta(\theta)}$ Mesuré $j := 1..n$ $Q_{m_j} := \pi\cdot\frac{(A_{j-1})^2+(A_j)^2}{(A_{j-1})^2-(A_j)^2}$